ZUR AXIOMATISCHEN CHARAKTERISIERUNG DES STEINERPUNKTES KONVEXER KÖRPER; BERICHTIGUNG UND NACHTRAG

VON
H. HADWIGER

ABSTRACT

The main theorem of a previous paper by H. Hadwiger is wrong, its inductive "proof" only works for the transition from an even to an odd dimension. By requiring covariance under all similarity transformations instead of homothetic transformations alone, we obtain a theorem which is shown to be equivalent to the characterization of Steiner points given by G. C. Shephard, K. A. Schmitt and R. Schneider. For dimensions $n \leqq 3$ a new short proof of the latter result is included.

1. Bei der Begründung der in der vorausgegangenen Arbeit [1] formulierten Kennzeichnung des Steinerpunktes ist dem Verfasser leider ein bedauerlicher Irrtum unterlaufen. Im Nachweis von Lemma 1, S. 172, Zeilen 8–6 vu, wird ausgesagt, dass sich die Eigenschaften 2.1 bis 2.4 der Funktion Φ sinngemäss auf Ψ_u bezogen auf die Grundebene G übertragen. Dies trifft jedoch für die Antisymmetrie 2.4 nicht zu. Der Induktionsbeweis ist an dieser Stelle unterbrochen und Lemma 1 ist nur richtig, wenn die Dimension n ungerade ist. In der Tat wird dann nach [2], S. 62 (69), einerseits $\Phi(\sigma P) = \Phi(P)$, nach der vorausgesetzten Antisymmetrie 2.4 andererseits $\Phi(\sigma P) = -\Phi(P)$, so dass $\Phi(P) = 0$ resultiert. Die weitere Konsequenz ist nun die, dass Lemma 2 auch nur für ungerade Dimensionen richtig bleibt, und dass der Hauptsatz der Arbeit nur unter einer zusätzlichen Voraussetzung gültig ist.*

In modifizierter Form lautet er:

SATZ. *Es gibt eine und nur eine additive, homothetieaequivariante und stetige Abbildung der Eikörperklasse $\mathfrak{C}^n$ in den Raum E^n, nämlich die, welche*

* Die Einsicht, dass der Satz unter den ursprünglichen schwachen Voraussetzungen falsch ist, verdankt der Verfasser Hinweisen der Herren W. Barthel, G. Ewald und R. Schneider, die sich anschliessend an das Kurzreferat an der Jahrestagung der DMV 1969 in freundlicher Weise um die Klärung der Frage bemühten.

Received February 8, 1970.

dem Eikörper seinen Steinerpunkt zuweist, vorausgesetzt, dass n ungerade ist und dass die Abbildung für uneigentliche Eikörper bereits den Steinerpunkt liefert.

Es sei daran erinnert, dass wir einen Eikörper $A \in \mathfrak{C}^n$ uneigentlich nennen, wenn $\dim A < n$ ausfällt.

Wir wollen auf eine einfache Anwendung dieses Satzes hinweisen: Es sei $n = 3$ und f eine additive, homothetieaequivariante und stetige Abbildung $f: \mathfrak{C}^3 \to E^3$ und es gelte $A \in \mathfrak{C}^2 \subset \mathfrak{C}^3 \Rightarrow f(A) = s(A)$, wo $s(A)$ den Steinerpunkt von A anzeigt. Dann gilt $A \in \mathfrak{C}^3 \Rightarrow f(A) = s(A)$. Vergleiche hierzu die Verwendung dieser Schlussweise am Ende der vorliegenden Arbeit.

Es soll noch vermerkt werden, dass sich die in der Note [1] erörterten Integrale 1.5, 1.7 und 1.10 aufgrund passender integralgeometrischer Umrechnungen aus der Shephardschen Darstellung 1.8 gewinnen lassen.

2. Die Darlegungen des ersten Abschnittes machen es klar, dass eine axiomatische Charakterisierung des Steinerpunktes aufgrund der gewöhnlichen Additivität nur möglich sein wird, wenn neben der zunächst wohl noch unvermeidbaren Stetigkeit eine starke Aequivarianz gefordert wird. Am nächsten liegt es, eine Aequivarianz gegenüber der Gruppe der Aehnlichkeitsabbildungen zu verlangen. — Wie bereits in [1] ausgeführt worden ist, haben G. C. Shephard [3] und K. A. Schmitt [4] andererseits eine analoge Kennzeichnung mit der Additivität im Minkowskischen Sinne gegeben. Der hier folgende Nachtrag bezieht sich auf die Frage, wie die beiden bisher ins Auge gefassten Charakterisierungen des Steinerpunktes miteinander zusammenhängen. Um die Problemlage klar zu erfassen, sollen die beiden in Frage kommenden Kennzeichnungen im Sinne einer Gegenüberstellung vollständig formuliert werden.

Zunächst haben wir die Erklärung der hierbei wesentlichen Eigenschaften einer Abbildung $f: \mathfrak{C}^n \to E^n$ der Klasse $\mathfrak{C}^n$ der Eikörper $A \subset E^n$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n in den Raum E^n kurz zusammenzufassen: Die Abbildung f, die jedem Eikörper $A \in \mathfrak{C}^n$ einen Punkt $f(A) \in E^n$ zuordnet, heisst additiv im Minkowskischen Sinn, additiv, ähnlichkeitsaequivariant und stetig, wenn

(1) $A, B \in \mathfrak{C}^n \Rightarrow f(A + B) = f(A) + f(B)$,

(2) $A, B, A \cup B \in \mathfrak{C}^n \Rightarrow f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$,

(3) $A \in \mathfrak{C}^n, \quad \kappa \in K^n \Rightarrow f(\kappa A) = \kappa f(A)$

(4) $A, A_i \in \mathfrak{C}^n \ (i = 1, 2, \cdots), \ A_i \to A \ (i \to \infty) \Rightarrow f(A_i) \to f(A) \ (i \to \infty)$,

gilt, wobei die Verknüpfung $+$ die vektorielle Addition, K^n die Gruppe der Aehnlichkeitsabbildungen $\kappa: E^n \to E^n$ ist und die Konvergenz $\to$ sich auf die in der Eikörperklasse $\mathfrak{C}^n$ übliche Metrik bezieht.

Die spezielle Abbildung $f = s$, die jedem Eikörper A seinen Steinerpunkt $s(A)$ zuweist, erfüllt simultan alle vier Forderungen (1) bis (4).

Die beiden Sätze, die wir einander gegenüberstellen wollen, lauten nun wie folgt:

SATZ a. *Ist f additiv im Minkowskischen Sinn, ähnlichkeitsaequivariant und stetig, so gilt $f = s$.*

SATZ b. *Ist f additiv, ähnlichkeitsaequivariant und stetig, so gilt $f = s$.*

Die beiden Sätze drücken aus, dass der Steinerpunkt durch die Eigenschaften (1), (3), (4) einerseits und durch (2), (3), (4) andererseits charakterisierbar sei. Wir können an dieser Stelle nicht auf die Beweisführung der beiden Aussagen eintreten, so dass wir die Frage ihrer allgemeinen Richtigkeit hier offen lassen müssen, sondern wir wollen lediglich ihre Aequivalenz nachweisen. Satz a ist für $n = 2$ von G. C. Shephard [3] bewiesen worden und für $n \geqq 2$ ist er mit dem von K. A. Schmitt [4] dargelegten Satz gleichwertig, indem die Aehnlichkeitsaequivarianz (3) in Zusammenwirkung mit den beiden andern Eigenschaften (1) und (4) leicht aus der schwächeren Bedingung der Aequivarianz gegenüber der Gruppe der kongruenten Abbildungen gefolgert werden kann. Satz b werden wir im letzten Abschnitt für $n = 2$ beweisen* und dann aufgrund des im ersten Abschnitt formulierten, gegenüber [1] berichtigten Satzes, die Gültigkeit weiter für $n = 3$ folgern.

Wir führen nun den in Aussicht gestellten Aequivalenzbeweis; (ba) *Aus Satz b folgt Satz a.*

Wir setzen voraus, dass f die Voraussetzungen (1), (3), (4) von Satz a erfüllt. Nun gilt für $A, B, A \cup B \in \mathfrak{C}^n$ die leicht verifizierbare Beziehung

$$(A \cup B) + (A \cap B) = A + B, \tag{5}$$

die beispielsweise von G. T. Sallee [5] S. 77, unten, implizite zur Begründung der additiven Eigenschaft von s herangezogen wurde.

* Herr R. Schneider hat dem Verfasser gegenüber erwähnt, dass ihm ein Beweis in diesem Fall bereits bekannt ist, der von Herrn Ch. Berg gefunden wurde (Geometrietagung in Oberwolfach, Juni 1969).

Aus (1) folgert man über (5) unmittelbar (2), so dass f also die Voraussetzungen (2), (3), (4) von Satz b erfüllt. Hieraus folgt $f = s$, also die Behauptung von Satz a.*

(ab) *Aus Satz a folgt Satz b.*

Wir setzen voraus, dass f die Voraussetzung (2), (3), (4) von Satz b erfüllt. Ist $n = 1$, so folgt $f = s$ in trivialer Weise. Es sei $n > 1$ und $f = s$ sei bereits für alle Dimensionen $< n$ sichergestellt. Mit einem beliebig gewählten Einheitsvektor u bilden wir mit dem Skalarprodukt

$$\Phi_u(A) = \langle f(A) - s(A), u \rangle \tag{6}$$

ein über $\mathfrak{C}^n$ definiertes Funktional. Im Hinblick darauf, dass sowohl f als auch s additiv sind, schliesst man mit der Induktionsannahme, dass Φ_u einfach additiv ist, so dass also

$$A, B, A \cup B \in \mathfrak{C}^n, \ \dim(A \cap B) < n \Rightarrow \Phi_u(A \cup B) = \Phi_u(A) + \Phi_u(B) \tag{7}$$

gilt. Da f und s weiter die Eigenschaften (3) aufweisen, folgt einmal die Translationsinvarianz

$$A \in \mathfrak{C}^n, \ t \in E^n \Rightarrow \Phi_u(A + t) = \Phi_u(A) \tag{8}$$

sowie auch die Linearität bezüglich Dilatation

$$A \in \mathfrak{C}^n, \ 0 < \lambda < \infty \Rightarrow \Phi_u(\lambda A) = \lambda \Phi_u(A). \tag{9}$$

Mit einem Zerlegungssatz, der sich auf die Minkowkische Addition zweier Eipolytope $P, Q \in \mathfrak{K}^n$ in der Teilklasse $\mathfrak{K}^n \subset \mathfrak{C}^n$ der konvexen Polyeder bezieht (vgl. [2], S. 63 (72)) gilt

$$\Phi_u(P + Q) = \Phi_u(P) + \Phi_u(Q). \tag{10}$$

Da nun s die Forderung (1) erfüllt, schliesst man mit Ansatz (6)

$$\langle f(P + Q), u \rangle = \langle f(P) + f(Q), u \rangle, \tag{11}$$

und da dies für alle u richtig ist, weiter auf

$$f(P + Q) = f(P) + f(Q). \tag{12}$$

Mit der Stetigkeit (4) von f resultiert jetzt, dass auch f im Minkowskischen Sinn additiv ist, und somit den Voraussetzungen (1), (3), (4) von Satz a genügt. Demnach muss $f = s$ sein, womit die Behauptung von Satz b auch für die Dimension n folgt, womit der Induktionsbeweis beendet ist.

---

* Auf die überraschend einfache Möglichkeit dieser Schlussweise (ba) ist der Verfasser von Herrn G. Ewald aufmerksam gemacht worden.

3. In diesem letzten Teil erbringen wir einen Beweis von Satz b für $n = 2$ und $n = 3$. Mit der im vorausgehenden Abschnitt gesicherten Aequivalenz ist in diesen Fällen auch Satz a nachgewiesen.

Wir begründen vorbereitend einen Hilfssatz*, den wir aus methodisch-technischen Gründen für die Gaussche Ebene G der komplexen Zahlen $z \in G$, die in der üblichen Weise auch als Punkte interpretiert werden, formulieren wollen. Mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen wir die Klasse der Eibereiche $A \subset G$. Translation und zentrierte Aehnlichkeitsabbildung von G in sich können durch komplexe Zahlen w repräsentiert werden, und die entsprechenden Abbildungen von Eibereichen lassen sich durch

$$w + A = \{z \in G;\ z = w + a,\ a \in A\}$$

$$wA = \{z \in G;\ z = wa,\ a \in A\}$$

darstellen. Es gilt nun das

Lemma. *Ist $z: \mathfrak{C} \to G$ eine Abbildung der Klasse $\mathfrak{C}$ in G, die jedem Eibereich $A \in \mathfrak{C}$ die komplexe Zahl $z(A)$ der Gausschen Ebene G einfach additiv, translationsinvariant, ähnlichkeitsaequivariant und stetig zuordnet, so dass also die Forderungen*

(1) $A, B, A \cup B \in \mathfrak{C},\ \dim(A \cap B) < 2 \Rightarrow z(A \cup B) = z(A) + z(B),$

(2) $A \in \mathfrak{C},\ w \in G \Rightarrow z(w + A) = z(A),$

(3) $A \in \mathfrak{C},\ w \in G \Rightarrow z(wA) = wz(A),$

(4) $A, A_i \in \mathfrak{C} (i = 1, 2, \cdots),\ A_i \to A (i \to \infty) \Rightarrow z(A_i) \to z(A)\ (i \to \infty)$

erfüllt sind, so ist sie trivial, dh. es gilt $z(A) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{C}$.

Beweis. Es bezeichne $D[\psi]$, $0 < \psi < \pi/2$, das rechtwinklige Dreieck $\mathrm{conv}(p_0, p_1, p)$ mit den Eckpunkten $p_0 = 0$, $p_1 = 1$ und $p = \cos\psi\, e^{i\psi}$ (i = imaginäre Einheit), das also eine in der reellen Achse von G liegende Hypothenuse der Länge 1 und den linksseitigen Basiswinkel ψ aufweist. Abkürzend schreiben wir

$$z(D[\psi]) = z(\psi).$$

* Herr P. Mani hat dem Verfasser während der Entstehung dieser Note einen anderen Beweis dieses Lemmas, das mit Satz b gleichwertig ist, zur Verfügung gestellt.

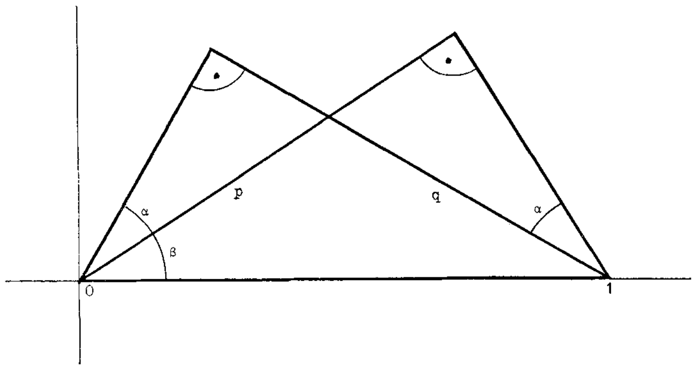
Mit der Zerlegung von $D[\pi/4]$ in zwei kleinere kongruente, mit dem ursprünglichen ähnliche Dreiecke resultiert mit (1) bis (3)

$$z(\pi/4) = (1/\sqrt{2})(e^{3i\pi/4} + e^{-3i\pi/4})z(\pi/4) = \sqrt{2}\cos(3\pi/4)z(\pi/4)$$

oder $z(\pi/4) = -z(\pi/4)$, so dass wir

$$z(\pi/4) = 0 \tag{5}$$

vormerken können. Es sei weiter $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < \pi/2$. Zeichnen wir die Figur,



die durch Ueberlagerung der beiden Dreiecke $D[\alpha + \beta]$ and $D[\beta]$ entsteht (vgl. Abb.), so ergibt die Auswertung der vorliegenden elementargeometrischen Zerlegungsmöglichkeit mit (1) bis (3) die Beziehung

$$z(\alpha + \beta) = pe^{i\beta}z(\alpha) - iqe^{i(\alpha+\beta)}\bar{z}(\alpha) + z(\beta), \tag{6}$$

wobei $p = \cos(\alpha + \beta)/\cos\alpha$, $q = \sin\beta/\cos\alpha$ die Schenkellängen des sich mit $D[\alpha + \beta] \cap D[\beta]$ ergebenden Dreiecks bezeichnen (vgl. Abb.). Mit (6) resultiert die Aussage

$$z(\alpha) = 0, \ z(\beta) = 0 \Rightarrow z(\alpha + \beta) = 0. \tag{7}$$

Setzen wir in (6) weiter $\alpha = \beta = \psi$, $0 < \psi < \pi/4$, so ergibt sich

$$z(2\psi) = (pe^{i\psi} + 1)z(\psi) - iqe^{2i\psi}\bar{z}(\psi) \tag{8}$$

mit $p = \cos 2\psi/\cos\psi$, $q = \operatorname{tg}\psi$. Direkte Ausrechnung bestätigt die Richtigkeit der Aussage

$$z(2\psi) = 0 \Rightarrow z(\psi) = 0. \tag{9}$$

Sind k und m natürliche Zahlen, $1 \leqq m < 2^{k+1}$, so gelangt man ausgehend von (5) mit iterierter Anwendung von (7) und (9) zum Ergebnis $z(m\pi/2^{k+2}) = 0$.

Die Stetigkeit (4) erlaubt jetzt den Schluss, dass für einen beliebigen Winkel ψ, $0 < \psi < \pi/2$, ebenso $z(\psi) = 0$ gelten muss. Wegen (2) und (3) ist für jedes rechtwinklige Dreieck $D \subset G$ offenbar $z(D) = 0$. In geläufiger Weise schliesst man mit (1), dass für jedes Eipolygon $P \subset G$ auch $z(P) = 0$ und mit (4) weiter, dass für alle Eibereiche $A \subset G$ $z(A) = 0$ ausfällt, wzzw.

Nun kann man Satz b für $n = 2$ mühelos folgern. In der Tat: Bezeichnen $x[p]$ und $y[p]$ die Koordinaten eines Punktes $p \in E^2$ bezüglich eines orthogonalen Systems, so wird durch Ansatz $z(A) = (x[f(A)] - x[s(A)]) + i(y[f(A)] - y[s(A)])$ eine Abbildung der Eibereichsklasse $\mathfrak{C}^2$, die wir mit der Klasse $\mathfrak{C}$ des Lemmas identifizieren wollen, in die Gaussche Ebene G angezeigt, welche die Forderungen (1) bis (4) des Lemmas erfüllt. Hierbei ist die triviale Richtigkeit des Satzes für $n = 1$ mitzuberücksichtigen. Mithin muss für alle $A \in \mathfrak{C}^2$ $z(A) = 0$, und damit $f(A) = s(A)$ gelten. Damit ist Satz b für $n = 2$ nachgewiesen.

Die Gültigkeit von Satz b für $n = 3$ ist nun weiter ein Korollar des im ersten Abschnitt formulierten Satzes, wobei der Aufstieg von $n = 2$ auf $n = 3$, wie ersichtlich, die schwächere Homothetiaequivarianz an Stelle der Aehnlichkeitsaequivarianz beansprucht. Darin liegt auch die Besonderheit dieses Fortsetzungssatzes.

References

1. H. Hadwiger, *Zur axiomatisichen Charakterisierung des Steinerpunktes konvexer Körper*. Israel J. Math. **7** (1969), 168–176.
2. H. Hadwiger, *Vorlesunger über Inhalt, oberfläche und Isoperimetrie*, 1957.
3. G. C. Shephard, *A uniqueness theorem for the Steiner point of a convex region*, J. London Math. Soc. **43** (1968), 439–444.
4. K. A. Schmitt, *Kennzeichnung des Steinerpunktes konvexer Körper*, Math. Z. **105** (1968), 387–392.
5. G. T. Sallee, *A valuation property of Steiner points*, Mathematika **13** (1966), 76–82.

Mathematisches Institut
Universität Bern